PART3　完全順列

3　n 冊の異なる本が，それぞれ対応するブックケースに 1 冊ずつ入っている。次の(1)～(3)において，本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は，何通りあるか。ただし，ブックケースはすべて異なるとする。

(1)　$n=3$ のとき

(2)　$n=4$ のとき

(3)　$n=5$ のとき

Point Pickup

1 から n までの整数を 1 列に並べた順列のうち，すべての k について

　　k 番目が k ではない

を満たすものを「完全順列」(または「攪乱(かくらん)順列」)という。

完全順列の総数は，樹形図をかいて求めることができる。

また，$n \geqq 4$ のときには，$n-1$，$n-2$ のときの結果を利用して求めることができる。

第 1 講　PART3　確認問題

1　n 人が１人１個ずつプレゼントを持ち寄り，プレゼント交換を行う。次のそれぞれの場合において，n 人全員が自分以外のプレゼントを受け取る交換方法は何通りあるか。

$n=3$ のとき　［ア］通り

$n=4$ のとき　［イ］通り

$n=5$ のとき　［ウエ］通り

PART3　完全順列

3　n 冊の異なる本が, それぞれ対応するブックケースに 1 冊ずつ入っている。次の(1)~(3)において，本をブックケースから取り出したあと，すべて間違ったブックケースに入れる方法は，何通りあるか。ただし，ブックケースはすべて異なるとする。

(1)　$n=3$ のとき

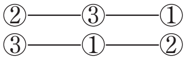
(2)　$n=4$ のとき

(3)　$n=5$ のとき

n 冊の本を①，②，……，ⓝとする。求める場合の数は，n 冊の本を 1 列に並べた順列のうち，すべてのⓚについて k 番目がⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)である。

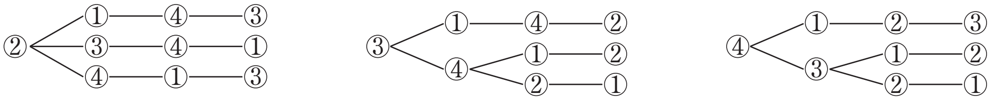
(1)　$n=3$ のとき，条件を満たす順列は右図。

よって，2 通り。



(2)　$n=4$ のとき，条件を満たす順列は下図。

よって，9 通り。



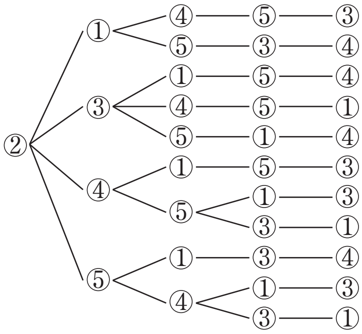
(3)　$n=5$ のとき

1 番目が②のとき，条件を満たす順列は右図の 11 通り。

1 番目が③，④，⑤のときも同様に 11 通りずつある。

したがって，求める場合の数は

$$11 \times 4 = 44 \text{ (通り)}$$



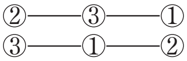
(別解)

n 冊の本を 1 列に並べた順列のうち，すべての k について k 番目がⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)を $W(n)$ とする。

たとえば，$n=2$ のとき，②−① の 1 通りのみ。よって　$W(2)=1$

(1)　$n=3$ のとき，右図より 2 通り。

よって　$W(3)=2$

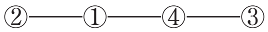


(2)　$n=4$ のとき，①が２番目のときを考える。

(i)　②が１番目のとき

③，④と３番目，４番目について，③が３番目以外，

④が４番目以外であるから，その総数は $W(2)$

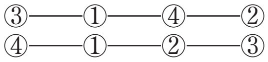


(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④と１番目，３番目，４番目について，

②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外

であるから，その総数は $W(3)$



(i)，(ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$W(2)+W(3)=1+2=3$

①が３番目，４番目のときも同様である。

したがって，求める場合の数は　$W(4)=3\times3=9$（通り）

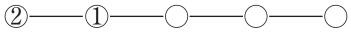
(3)　$n=5$ のとき，①が２番目のときを考える。

(i)　②が１番目のとき

③，④，⑤と３番目，４番目，５番目について，

③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外

であるから，その総数は $W(3)$

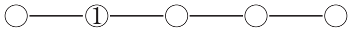


(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④，⑤と１番目，３番目，４番目，５番目

について，②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外，

⑤が５番目以外であるから，その総数は $W(4)$



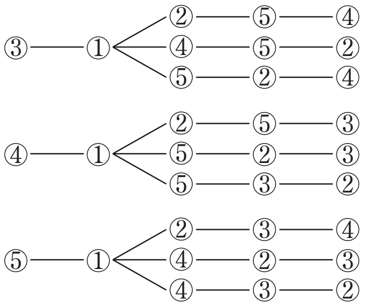
(i)，(ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$W(3)+W(4)=2+9=11$

①が３番目，４番目，５番目のときも同様である。

したがって，求める場合の数は

$W(5)=11\times4=44$（通り）



第 1 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：9，ウエ：44

[解説]

n 個のプレゼントを，①，②，……，ⓝとする。

求める場合の数は，n 個のプレゼントを 1 列に並べた順列のうち，すべての k について，k 番目のプレゼントがⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)である。 [A]

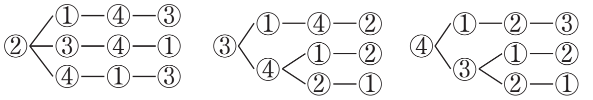
[A]　1 から n までの整数を 1 列に並べた順列のうち，すべての k について
　k 番目がⓚではない
を満たすものを「完全順列」(または「攪乱（かくらん）順列」)という。ただし，k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数。
完全順列の総数は，樹形図をかいて求めることができる。

$n=3$ のとき，条件を満たす順列は右図。よって　**2** 通り

②——③——①
③——①——②

$n=4$ のとき，条件を満たす順列は下図。

よって　**9** 通り

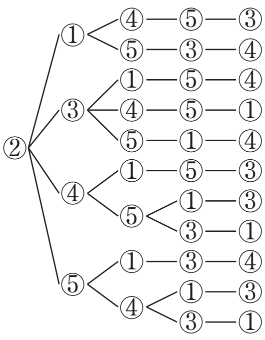


$n=5$ のとき

1 番目が②のとき，条件を満たす順列は右図の 11 通り。

1 番目が③，④，⑤のときも同様に 11 通りずつある。

したがって，求める場合の数は　$11 \times 4 =$ **44**（通り）



(別解)

n 個のプレゼントを 1 列に並べた順列のうち，すべての k について，k 番目のプレゼントがⓚでないものの総数(k は $1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数)を $W(n)$ とする。 [B]

[B]　完全順列は，$n \geqq 4$ のときには，$W(n-1)$，$W(n-2)$ を利用して $W(n)$ を求めることができる。

$n=2$ のとき，右図の 1 通りのみ。　②——①

よって　$W(2)=1$

$n=3$ のとき，右図より　２通り

②──③──①
③──①──②

よって　$W(3)=\mathbf{2}$

$n=4$ のとき，①が２番目の場合を考える。

(i)　②が１番目のとき

③，④と３番目，４番目について，

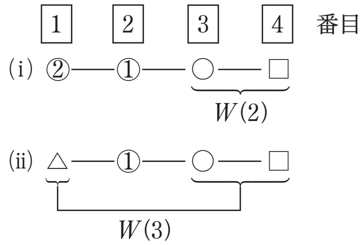
③が３番目以外，④が４番目以外であるから，

その総数は　$W(2)$

(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④と１番目，３番目，４番目について，

②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外であるから，その総数は　$W(3)$



(i)，(ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$W(2)+W(3)=1+2=3$

①が３番目，４番目のときも同様であるから

$W(4)=3\times3=\mathbf{9}$ [C]

[C]　一般に，$n\geqq3$ のとき
$W(n)=(n-1)\{W(n-1)+W(n-2)\}$
が成り立つ。

$n=5$ のとき，①が２番目の場合を考える。

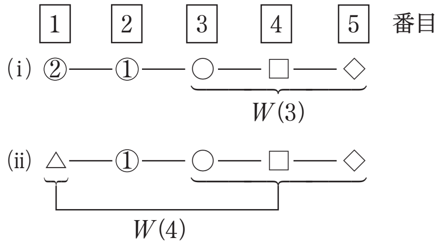
(i)　②が１番目のとき

③，④，⑤と３番目，４番目，５番目について，

③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外であるから，その総数は　$W(3)$

(ii)　②が１番目以外のとき

②，③，④，⑤と１番目，３番目，４番目，５番目について，②が１番目以外，③が３番目以外，④が４番目以外，⑤が５番目以外であるから，その総数は　$W(4)$



(i), (ii)より，①が２番目のときの場合の数は

$$W(3)+W(4)=2+9=11$$

①が３番目，４番目，５番目のときも同様であるから

$$W(5)=11\times 4=44$$